Universidade Federal da Paraiba — Turno: Manhã
Centro de Ciências Exatas e da Natureza — Data: 17/12/2012
Depto de Matemática
Disciplina: Matemática Elementar II
Professor: Milton
Aluno:___________________________ Matricula:____________

2^a Lista de exercícios

1. Sejam A, B subconjuntos de U e X um subconjunto de U com as seguintes propriedades:

   (a) $A \subseteq X$ e $B \subseteq X$.

   (b) Se $A \subseteq Y$ e $B \subseteq Y$, para todo $Y \subseteq U$.

   Mostre que $X = A \cup B$.

2. Enuncie e demonstre um resultado análogo ao anterior, caracterizando $A \cap B$.

3. Sejam A, B, C e D

   (a) Mostre que se $A \subseteq B$ e $C \subseteq D$ então $(A \cup C) \subseteq (B \cup D)$ e $(A \cap C) \subseteq (B \cap D)$.

   (b) Mostre que se $A = B$ e $C = D$ então $(A \cup C) = (B \cup D)$ e$(A \cap C) = (B \cap D)$.

4. Sejam A e B conjuntos. Mostre que

   (a) $A - A = \emptyset$.

   (b) $A - B = A - (A \cap B) = (A \cup B) - B$.

   (c) $(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$.

   (d) $A - B = B^c - A^c$.

   (e) $A = (A \cap B) \cup (A - B)$.

   (f) $A \cup B = (A \cap B) \cup (A - B) \cup (B - A)$.

   (g)$A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$

   (h) $(A - B) - C = A - (B \cup C)$.

   (i) $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (C - A)$.

   (j) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (C \cap A)$.

5. Sejam A e B conjuntos.

(a) Mostre que $A \cup B = A \cup (B - A)$, com $A \cap (B - A) = \emptyset$.

(b) Mostre que $B = (A \cap B) \cup (B - A)$, com $(A \cap B) \cap (B - A) = \emptyset$.

6. Vamos definir a operação de "$+$" em conjuntos como segue: se A e B são conjuntos, então

$$A + B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$$

Mostre que:

(a) $A + \emptyset = A$.

(b) $A + B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$.

(c) $A + B = (A \cup B) - (B \cap A)$.

(d) $A + B = B + A$.

(e) $A + B = A + C \Rightarrow B = C$.

(f) $(A + B)^c = (A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)$.

(g) $A + (B + C) = (A + B) + C$.

(h) $A \cap (B + C) = (A \cap B) + (A \cap C)$.

(i) $A \cup C = B \cup C \Leftrightarrow A + B \subseteq C$.

(j) $(A \cup C) + (B \cup C) = (A + B) - C$.

7. Mostre que os conjuntos $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \cdots$ são todos distintos.

8. Sejam A, B, C e D conjuntos não vazios.

(a) Mostre que A e B são disjuntos se, e somente se, $A \times E$ e $B \times E$ são disjuntos, para qualquer conjunto E.

(b) Mostre que $A \subseteq B$ e $C \subseteq D$ se, e somente se, $A \times C \subseteq B \times D$.

(c) Mostre que $A \times B = C \times D$ se, e somente se, $A = C$ e $B = D$.

(d) Mostre que $A \times B$ e $A^c \times C$ são disjuntos.

(e) Mostre que $B \times A$ e $C \times A^c$ são disjuntos.

9. Sejam G e H gráficos.

(a) Mostre que se $G \subseteq A \times B$, então $G^{-1} \subseteq B \times A$.

(b) Mostre que se $G \subseteq A \times B$ e $H \subseteq B \times C$ então $H \circ G \subseteq A \times C$.

10. Sejam G um gráfico e B um subconjunto de $Dom\,(G)$. Vamos admitir a *restrição* de G a B como

$$G|_B = \{(x,y) : (x,y) \in G \text{ e } x \in B\}.$$

Note que $G|_B = G \circ I$, em que I é o gráfico (inclusão) $I \subseteq B \times Dom\,(G)$. Mostre que:

(a) $G|_B = G \cap (B \times \mathrm{Im}\,(G))$.

(b) $G|_{(B \cup C)} = G\,|_B| \cup G|_C$.

(c) $G|_{(B \cap C)} = G|_B \cap G|_C$.

(d) $(G \circ H)\,|_B = G \circ (H|_B)$.

11. Sejam G e H gráficos. Mostre que se G e H são conjuntos, então G^{-1} e $G \circ H$ são conjuntos.

12. Sejam A e B conjuntos. Mostre que $A - B$ e $A + B$ são conjuntos.

13. Sejam $\{A_i\}_{i \in I}$, $\{B_j\}_{j \in J}$ famílias de subconjuntos de U e B um subconjunto qualquer de U.

(a) Mostre que se $A_i \subseteq B$, para todo $i \in I$, então $\cup_{i \in I} A_i \subseteq B$.

(b) Mostre que se $B \subseteq A_i$, para todo $i \in I$, então $B \subseteq \cap_{i \in I} A_i$.

(c) Mostre que se $A_i \subseteq B_i$, para todo $i \in I$, então $\cup_{i \in I} A_i \subseteq \cup_{i \in I} B_i$.

(d) Mostre que se $A_i \subseteq B_i$, para todo $i \in I$, então $\cap_{i \in I} A_i \subseteq \cap_{i \in I} B_i$.

14. Sejam $\{A_i\}_{i \in I}$ uma família de subconjuntos de U e X um subconjunto de U com as seguintes propriedades:

(a) Para todo $i \in I$, tem-se $X \subseteq A_i$.

(b) Se $Y \subseteq A_i$ para todo $i \in I$ então $Y \subseteq X$.

Mostre que $X = \cap_{i \in I} A_i$.

15. Enuncie e demonstre um resultado análogo ao anterior, caracterizando $\cup_{i \in I} A_i$.

16. Seja $\{A_i\}_{i \in I}$ uma família de subconjuntos de U. Mostre que

(a) $(\cup_{i \in I} A_i)^c = \cap_{i \in I} A_i^c$.

(b) $(\cap_{i \in I} A_i)^c = \cup_{i \in I} A_i^c$.

17. Sejam $\{A_i\}_{i\in I}$, $\{B_j\}_{j\in J}$ famílias de subconjuntos de U. Mostre que

 (a) $(\cup_{i\in I}A_i)\cap(\cup_{j\in J}B_j)=\cup_{(i,j)\in I\times J}(A_i\cap B_j)$.

 (b) $(\cap_{i\in I}A_i)\cap(\cap_{j\in J}B_j)=\cap_{(i,j)\in I\times J}(A_i\cup B_j)$.

 (c) $(\cap_{i\in I}A_i)\times(\cap_{j\in J}B_j)=\cap_{(i,j)\in I\times J}(A_i\times B_j)$.

 (d) $(\cup_{i\in I}A_i)\times(\cup_{j\in J}B_j)=\cup_{(i,j)\in I\times J}(A_i\times B_j)$.

18. Sejam $\{A_i\}_{i\in I}$ uma família de subconjuntos de U e A um subconjunto de U. Mostre que:

 (a) $\cup_{i\in I}\mathcal{P}(A_i)\subseteq\mathcal{P}(\cup_{i\in I}A_i)$.

 (b) $\cap_{i\in I}\mathcal{P}(A_i)\subseteq\mathcal{P}(\cap_{i\in I}A_i)$.

 (c) $A\cup(\cap_{i\in I}A_i)=\cap_{i\in I}(A\cup A_i)$.

 (d) $A\cap(\cup_{i\in I}A_i)=\cup_{i\in I}(A\cap A_i)$.

19. Sejam A e B conjuntos.

 (a) Mostre que $A\subseteq B$ se, e somente se, $\mathcal{P}(A)\subseteq\mathcal{P}(B)$.

 (b) Mostre que $A=B$ se, e somente se, $\mathcal{P}(A)=\mathcal{P}(B)$.

 (c) Mostre que $A\cap B=\emptyset$ se, e somente se, $\mathcal{P}(A)\cap\mathcal{P}(B)=\emptyset$.

20. Determine explicitamente os conjuntos $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$ e $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$.

21. Sejam A,B conjuntos, $f:A\to B$ uma função, $\{C_i\}_{i\in I}$ uma família de subconjuntos de A e $\{D_i\}_{i\in I}$ uma família de subconjuntos de B.

 (a) Mostre que $f(\cup_{i\in I}C_i)=\cup_{i\in I}f(C_i)$.

 (b) Mostre que $f^{-1}(\cup_{i\in I}D_i)=\cup_{i\in I}f^{-1}(D_i)$.

 (c) Mostre que $f^{-1}(\cap_{i\in I}D_i)=\cap_{i\in I}f^{-1}(D_i)$.

 (d) Mostre que $f(\cap_{i\in I}C_i)\subseteq\cap_{i\in I}f(C_i)$. Mostre que se f é injetora, então ocorre a igualdade.

22. Sejam $\{A_i\}_{i\in I}$ e $\{B_i\}_{i\in I}$ duas famílias tais que $B_i\subseteq A_i$, para todo $i\in I$. Mostre que

$$\prod_{i\in I}B_i\subseteq\prod_{i\in I}A_i.$$

23. Seja A um conjunto. Diremos que uma família $\{A_i\}_{i\in I}$ é uma *cobertura* de A se

$$A\subseteq\bigcup_{i\in I}A_i.$$

Sejam $\{A_i\}_{i\in I}$ e $\{B_j\}_{j\in J}$ duas coberturas distintas de A.Mostre que a família

$$\{A_i \cap B_j\}_{(i,j)\in I\times J}$$

é uma cobertura de A.

24. Sejam $\{A_i\}_{i\in I}$ e $\{B_j\}_{j\in J}$ partições de A e B, respectivamente. Mostre que a famíla

$$\{A_i \times B_j\}_{(i,j)\in I\times J}$$

é uma partição de $A \times B$.

25. Sejam $f : A \to B$ uma função sobrejetora e B_j uma partição de B. Mostre que $\{f^{-1}(B_j)\}_{j\in J}$ é uma partição de A.

26. Sejam $f : A \to B$ uma função injetora e $\{A_i\}_{i\in I}$ uma partição de A. Mostre que $\{f(A_i)\}_{i\in I}$ é uma partição de $f(A)$.

27. Mostre que o axioma ZF_3 é uma consequência do axioma ZF_7. Assim o axioma ZF_3 pode ser eliminado.

28. Sejam A e B conjuntos. Use o axioma ZF_7 para mostrar que $A \times B$ é um conjunto.

29. Sejam A e B conjuntos. Mostre que B^A é um conjunto.

30. Sejam A, B e C conjuntos.
    (a) Mostre que $A^C \cup B^C \subseteq (A \cup B)^C$.
    (b) Mostre que $A^C \cap B^C = (A \cap B)^C$.
    (c) Mostre que $A^C - B^C = (A - B)^C$.

31. Seja $f : A \to B$ uma função sobrejetora. Para $x, y \in A$, definimos

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x) = f(y).$$

Mostre que $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência sobre A, cujas classes de equivalências são imagens inversas de f.

32. Seja $\{\mathcal{R}_i\}_{i\in I}$ uma família de classes de equivalência sobre A. Mostre que $\cap_{i\in I}\mathcal{R}_i$ é uma relação de equivalência sobre A.

33. Seja $A \subseteq B$ fixado. Para $X, Y \in \mathcal{P}(B)$, definimos

$$X\mathcal{R}Y \Leftrightarrow A \cap X = A \cap Y.$$

Mostre que $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência sobre $\mathcal{P}(B)$.

34. Seja $f : A \to B$ uma função, com A um conjunto não vazio. Mostre que: $f : A \to B$ é injetora se, e somente se, existe uma função $g : B \to A$ tal que $g \circ f = I_A$.

35. Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida como $f(n) = n + 1$. Mostre que existem infinitas funções $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tais que $g \circ f = I_{\mathbb{N}}$, mas não existe inversa à direita.

36. Seja $f : A \to B$ uma função, com A um conjunto não vazio. Mostre que, f é sobrejetora se, e somente se, existe uma função $g : B \to A$ tal que $f \circ g = I_B$.

37. Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida como

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{n+1}{2} & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Mostre que existem infinitas funções $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tais que $f \circ g = I_{\mathbb{N}}$, mas não existe inversa à esquerda.

38. Seja $I =]-1, 1[$ um intervalo aberto de $\mathbb{R}$.

(a) Mostre que a função $f : I \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \frac{x}{1 - x^2}$$

é bijetora. Determine sua inversa.

(b) Mostre que a função $f : I \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \frac{x}{1 - |x|}$$

é bijetora. Defina sua inversa.

(c) Mostre que a função $f : I \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

é bijetora. Determine sua inversa.

(d) Mostre que função $f : I \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

é bijetora. Determine sua inversa.

39. Sejam $g : B \to C$ e $h : B \to C$ duas funções. Mostre que se

$$g \circ f = h \circ f$$

para qualquer função $f : A \to B$ então $g = h$.

40. Sejam $g : A \to B$ e $h : A \to B$ duas funções. Mostre que se C é um conjunto com pelo menos dois elementos e

$$f \circ g = f \circ h$$

para qualquer função $f : B \to C$ então $g = h$.